

MP

OPTEGNELSER ANGÅENDE JERNBETON I HUSBYGNING

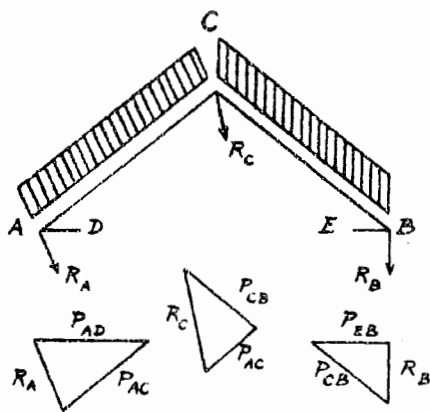
Chr. Nøkkentved.

Udgivet af  
Polyteknisk Forening  
1945  
Genoptrykt 1949

### Bærende skiver.

Hvor to plane jernbetonplader støder sammen, vil man i almindelighed have en gensidig understøtningslinie for de to plader.

Dette konstruktionsprincip, der meget ofte kan bringes i anvendelse i jernbetonhuse, forstås lettest, hvis vi f.eks. ser på et jernbetontag.



Tagpladen AC tænkes understøttet i A og C. Pladen BC i B og C. Herved vil der komme de viste reaktioner  $R_A$ ,  $R_C$  og  $R_B$  ( $R_C$  er resultanten af enkeltreaktionerne i punkt C fra plade AC og plade CB). Disse tre kræfter opløses efter retningerne for de plader, der støder sammen i pågældende punkt, nemlig  $R_A$  i  $P_{AD}$  og  $P_{AC}$ ,  $R_C$  i  $P_{AC}$  og  $P_{CB}$  og  $R_B$  i  $P_{CB}$  og  $P_{EB}$ .

Pladen AC betragtes nu som drager, påvirket af de kræfter, som falder i dens egen plan, d.v.s.  $P_{AC}$  fra punkterne A og C. Og hvis denne drager er understøttet ved enderne, f.eks. af husets gavle, og det samme gælder for de andre pladedragere, får man et fast, ubevægeligt system, der kan optage de virkende kræfter på den angivne måde.

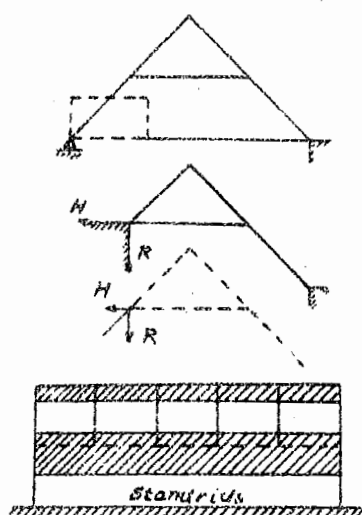
De kræfter, der virker på "pladen" AC, er dels vinkelret på denne, nemlig vindtryk, og dels lodrette, egenvægt og sne. Disse sidste opløses i en komponent vinkelret på pladen og en komponent i pladen. Det er for de på pladen vinkelrette belastninger og komponenter, at "pladen" AC skal beregnes for bøjning, medens belastningskomponenten i pladen optages af "dragere" AC sammen med de før omtalte reaktionskomponenter  $P_{AC}$ .

Det viste tag kan altså, når de to små dragere AD og EB findes, bære frit fra gavl til gavl uden nogen anden understøtning, forudsat at beregningen ikke giver urimelige dimensioner.

I stedet for dragerne AD og EB kan der findes lodrette mure, og man opløser da  $R_A$  og  $R_B$  efter tagpladen og en lodret linie.

Dimensionering af et sådant tag omfatter dimensioneringen af tagpladerne dels som plader og dels som dragere. Grænsen for, hvor store konstruktioner man kan udføre på denne måde, sættes som oftest af pladedimensioneringen. Hvis denne giver for store og tunge plader, fordi spændvidden AC er for stor, kan man indskyde en ekstra understøtning mellem A og C, f.eks. i form af en vandret plade, der virker som drager fra gavl til gavl på samme måde som de andre pladedragere. Men denne plade bliver let for stor, og man må da gå over til andre konstruktionsformer. Man kan på denne og mange andre måder anvende konstruktionsprincippet "bærende skiver". En udmærket måde at få en oversigt over en sådan konstruktions virkemåde og stivhed er at lave papmodeller, som man belaster på forskellig vis. Modellen giver dog ingen oplysning om de fremkaldte spændinger og derfor heller ikke om de nødvendige dimensioner.

Som et mere sammensat eksempel skal nævnes taget på en del af det nye Nationalmuseum i København, hvor spændvidden var så stor, at man fik den mest økonomiske konstruktion ved at anvende jernbetonspær med plade imellem.



Taget består af en række spær med hanebånd; ved spærenes fod findes trækband, der ligger indstøbt i den øverste etageplade. Imellem spærene ligger der som nævnt en tagplade af jernbeton. Nu ønskede man at anbringe en del af museet heroppe, som vist punkteret overst, hvorfor man måtte udbygge en række lange kviste. Følgen var, at på en lang strækning blev spærene i virkeligheden klippet over, således at de i den ene side ender ca. 2 m over den bærende mur. Disse afklippede spær blev i den ene side reg-

net som fast understøttet 2m over den bærende mur, og man fandt den lodrette reaktion og det horisontale tryk, som spæret udøver på en fast understøtning i denne højde. For at overføre disse kræfter blev selve tagfladen taget i brug, idet der samtidig mellem ha-

n  
n  
d  
r  
p  
d  
v  
E

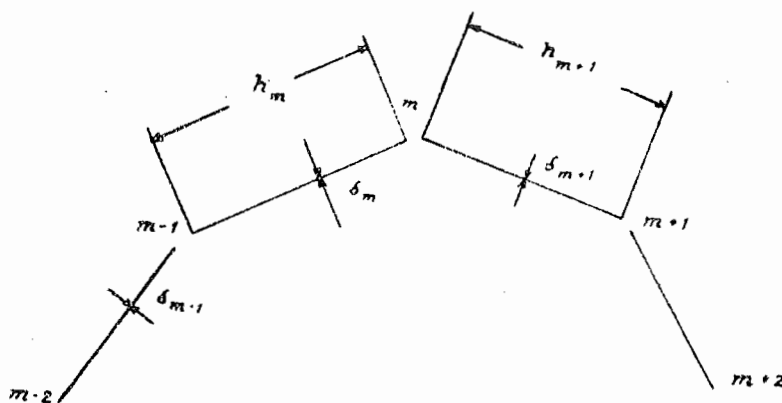
m  
f  
a  
n  
d  
t  
v  
f  
n

ξ  
s

nebjælkerne blev udført en ganske lille vandret pladedrager. Når nu de to kræfter R og H opløses efter de to dragerplaner, belastes de to dragere derfor kun af kræfter i deres egen plan. Idet man regner dem understøttet på de nærmeste hovedspær, som ikke er klippet over, vil disse da påvirkes dels af reaktionerne fra de to pladedragere og dels af de direkte virkende kræfter.

Et andet meget vigtigt område for anvendelsen af "bærende skiver" er jernbetonstrapper, som behandles i næste paragraf.

#### Samvirken af bærende skiver.



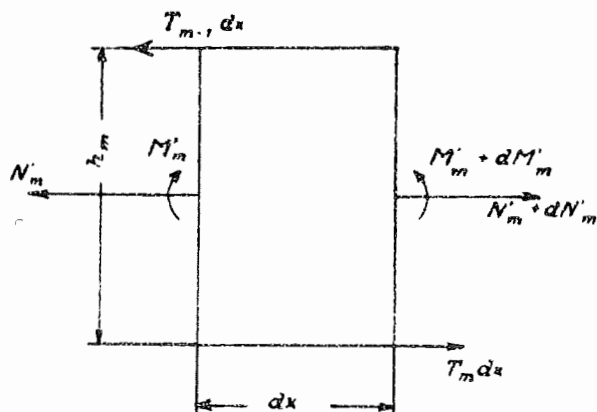
I figuren er vist en række skiver med knæklinierne  $m-2$ ,  $m-1$ ,  $m$ , ..... Skiven fra  $m-1$  til  $m$  gives nummeret  $m$ . For at have faste fortegn for momenter og transversalkræfter vil vi regne, at den kant af en skive, der har det mindste nummer, er opad, d.v.s. at et moment i en skive regnes positivt, når der er træk i den kant, der har det største nummer.

Vi forudsætter, at vi har opløst kræfterne i knæklinierne efter skivernes planer, således som det tidligere er forklaret, og at vi har bestemt momenterne  $M$  i skiverne. Derved vil der i kanten  $m$  fremkaldes spændingen  $\sigma_{m,m}$  i skive  $m$  og spændingen  $\sigma_{m,m+1}$  i skive  $m+1$ :

$$\sigma_{m,m} = + \frac{6M_m}{\delta_m h_m^2} ; \quad \sigma_{m,m+1} = - \frac{6M_{m+1}}{\delta_{m+1} h_{m+1}^2}$$

$\delta_m$  og  $\delta_{m+1}$  er skivernes tykkelser,  $h_m$  og  $h_{m+1}$  dens højder ( $h_m$  er således afstanden fra kant  $m$  til kant  $m-1$ ).

Hvis  $\delta_{m,m} \neq \delta_{m,m+1}$ , må der i knæklinien  $m$  virke en gensidig forskydningskraft  $T_m$  pr. længdeenhed mellem de to skiver, således at  $\delta_{m,m}$  bliver lig  $\delta_{m,m+1}$ .



I hosstående figur er vist et stykke af længden  $dx$  af skive  $m$  med de virkende forskydningskræfter, for hvilke vi vil finde momenter og normalkræfter i skivedrageren.

Da der ingen ydre tværkræfter findes, er  $Q = 0$  overalt i drageren, hvorfor også  $T = 0$ .

Af indre snitkræfter er der normalkraft  $N'$  og moment  $M'$  ( $M$  er momentet fra de ydre kræfter,  $N'$  og  $M'$  normalkraft og moment fra forskydningskræfterne  $T$ ).

Vandret projektlionsligning giver:

$$\frac{dN'_m}{dx} = T_{m-1} - T_m$$

Momentligning om et punkt i skivens midterakse giver:

$$\frac{dM'_m}{dx} = -\frac{1}{2}h_m(T_{m-1} + T_m)$$

Kender vi  $N'$  og  $M'$ , kan vi udtrykke de endelige spændinger:

$$\sigma_{m,m} = + \frac{6M'_m}{\delta_m h_m^2} + \frac{6M'_m}{\delta_m h_m^2} + \frac{N'_m}{\delta_m h_m}$$

$$\sigma_{m,m+1} = - \frac{6M'_{m+1}}{\delta_{m+1} h_{m+1}^2} - \frac{6M'_{m+1}}{\delta_{m+1} h_{m+1}^2} + \frac{N'_{m+1}}{\delta_{m+1} h_{m+1}}$$

Vi sætter disse to spændinger lig hinanden og differntierer den derved fremkomne ligning:

$$\frac{1}{\delta_m h_m} \left( \frac{6}{h_m} \frac{dM'_m}{dx} - 3(T_{m-1} + T_m) + T_{m-1} - T_m \right) =$$

$$\frac{1}{\delta_{m+1} h_{m+1}} \left( -\frac{6}{h_{m+1}} \frac{dM'_{m+1}}{dx} + 3(T_m + T_{m+1}) + T_m - T_{m+1} \right)$$

Denne ligning kan skrives:

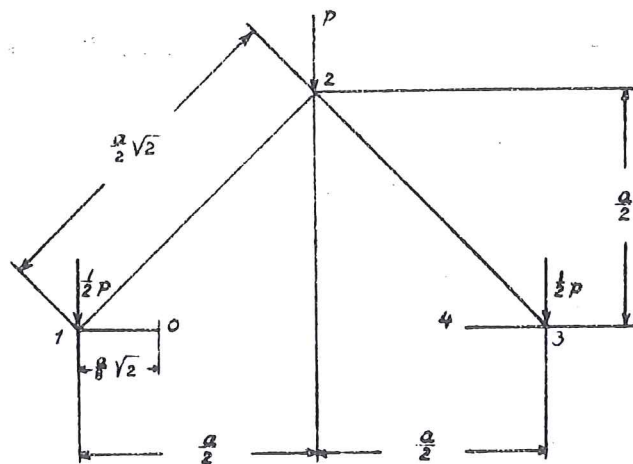
$$\frac{1}{\delta_m h_m} \left( -\frac{6Q_m}{h_m} - 2T_{m-1} - 4T_m \right) = \frac{1}{\delta_{m+1} h_{m+1}} \left( +\frac{6Q_{m+1}}{h_{m+1}} + 4T_m + 2T_{m+1} \right)$$

Heraf fås:

$$\begin{aligned} & -T_{m-1} \frac{1}{\delta_m h_m} - 2T_m \left( \frac{1}{\delta_m h_m} + \frac{1}{\delta_{m+1} h_{m+1}} \right) - T_{m+1} \frac{1}{\delta_{m+1} h_{m+1}} \\ & = 3 \frac{Q_m}{\delta_m h_m^2} + 3 \frac{Q_{m+1}}{\delta_{m+1} h_{m+1}^2} \end{aligned}$$

Man ser, at dette er en "Clapeyronligning"; der kan skrives en sådan op for hver knæklinie, d.v.s. man får lige så mange ligninger som ubekendte T'er. Når ligningerne løses, findes T som funktion af Q, d.v.s. af x.

Eksempel:



$$\begin{aligned} p_{0-1} &= -\frac{1}{2} p & Q_1 &= -\frac{1}{2} px & \text{x regnes fra} \\ p_{1-2} &= -p\sqrt{2} & Q_2 &= -px\sqrt{2} & \text{dragermidte.} \\ p_{2-3} &= +p\sqrt{2} & Q_3 &= +px\sqrt{2} \\ p_{3-4} &= +\frac{1}{2} p & Q_4 &= +\frac{1}{2} px \end{aligned}$$

Der kan skrives en ligning op for punkterne 1, 2 og 3:

$$-2T_1 \left( \frac{8}{a\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{a} \right) - T_2 \frac{\sqrt{2}}{a} = -3 \frac{\frac{1}{2} px}{\left( \frac{a\sqrt{2}}{8} \right)^2} - 3 \frac{px\sqrt{2}}{\left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

6.

$$T_1 \frac{\sqrt{2}}{a} - 2T_2 \frac{2\sqrt{2}}{a} - T_3 \frac{\sqrt{2}}{a} = 0$$

$$- T_2 \frac{\sqrt{2}}{a} - 2T_3 \left( \frac{8}{a\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{a} \right) = + 3 \frac{\frac{1}{2}px}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{8}\right)^2} + 3 \frac{px\sqrt{2}}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Heraf fås:

$$T_1 = - T_3 = + \frac{3}{5} \frac{px}{a} (4\sqrt{2} + 1)$$

$$T_2 = 0$$

Skive 0-1:  $\frac{dN'}{dx} = - \frac{3}{5} \frac{px}{a} (4\sqrt{2} + 1)$

$$N' = - \frac{3}{10} \frac{px^2}{a} (4\sqrt{2} + 1) + c_1$$

For  $x = \frac{1}{2}$  er  $N' = 0$ :  $c_1 = + \frac{3}{40} \frac{pl^2}{a} (4\sqrt{2} + 1)$

$$\frac{dM'}{dx} = - \frac{a\sqrt{2}}{16} \frac{3}{5} \frac{px}{a} (4\sqrt{2} + 1)$$

$$M' = - \frac{3\sqrt{2}}{80} \frac{px^2}{2} (4\sqrt{2} + 1) + c_1$$

For  $x = \frac{1}{2}$  er  $M' = 0$ :  $c_1 = + \frac{3\sqrt{2}}{640} pl^2 (4\sqrt{2} + 1)$

I midterpunktet fås da:

$$N = + \frac{3}{40} p \frac{l^2}{a} (4\sqrt{2} + 1) = 0,5 p \frac{l^2}{a}$$

$$M = - \frac{1}{8} \frac{1}{2} pl^2 + \frac{3\sqrt{2}}{640} pl^2 (4\sqrt{2} + 1)$$

$$= - (0,0625 - 0,0441) pl^2 = - 0,0184 pl^2$$

$$\left. \begin{matrix} S_1 \\ S_0 \end{matrix} \right\} = \frac{0,5pl^2 \cdot 8}{a^2\sqrt{2}} + \frac{0,0184pl^2 \cdot 6}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{8}\right)^2} = p \frac{l^2}{a} (2,83 + 3,53) = \begin{cases} -0,70 p \frac{l^2}{a^2} \\ +6,36 p \frac{l^2}{a^2} \end{cases}$$

Havde man beregnet skive 0-1 uden hensyn til forskydningskraften, havde man fundet:

$$S = + \frac{0,0625 pl^2 \cdot 6}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{8}\right)^2} = \pm 12 p \frac{l^2}{a^2}$$

Skive 1-2:  $\frac{dN'}{dx} = + \frac{3}{5} \frac{px}{a} (4\sqrt{2} + 1)$

$$N' = + \frac{3}{10} \frac{px^2}{a} (4\sqrt{2} + 1) + c_1$$

7.

$$c_1 = -\frac{3}{40} p \frac{l^2}{a} (4\sqrt{2} + 1)$$

$$\frac{dM'}{dx} = -\frac{a\sqrt{2}}{4} \frac{3}{5} \frac{px}{a} (4\sqrt{2} + 1)$$

$$M' = -\frac{3\sqrt{2}}{20} \frac{px^2}{2} (4\sqrt{2} + 1) + c_1$$

$$c_1 = +\frac{3\sqrt{2}}{160} pl^2 (4\sqrt{2} + 1)$$

I midtpunktet fås da:

$$N = \frac{3}{40} p \frac{l^2}{a} (4\sqrt{2} + 1) = -0,5 p \frac{l^2}{a}$$

$$\begin{aligned} M &= -\frac{p\sqrt{2}}{8} l^2 + \frac{3\sqrt{2}}{160} pl^2 (4\sqrt{2} + 1) \\ &= (-0,1768 + 0,1765)pl^2 = -0,0003 pl^2 \end{aligned}$$

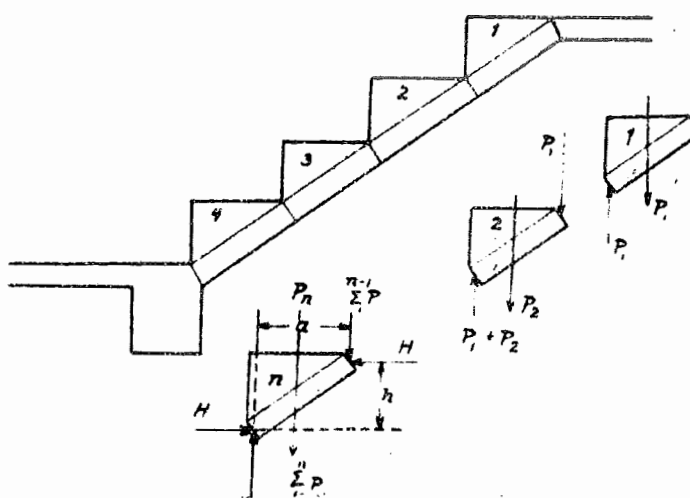
$$\left. \begin{array}{l} s_2 \\ s_1 \end{array} \right\} = -\frac{0,5 pl^2}{a^2} \sqrt{2} + \frac{0,0003 pl^2 \cdot 6}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = p(-0,707 \mp 0,004) \frac{l^2}{a^2}$$

$$= \begin{cases} -0,711 p \frac{l^2}{a^2} \\ -0,703 p \frac{l^2}{a^2} \end{cases}$$



### Indmurede trapper.

Vi tænker os, at trinene er indmurede i en væg i den ene ende, men er fri i den anden ende; trinene hviler på hinanden. Indmuringen vil næsten altid være så kort, at der ikke kan optages noget bøjningsmoment, hvorimod der fra trin til mur kan overføres vridningsmomenter.



Vi tænker os først, at det øverste trin ikke støtter mod etageadskillelsen. Når trinets ikke kan overføre sin belastning  $P_1$  gennem bøjning ind i muren, kan  $P_1$  kun bæres af trin 2, og der kommer derved vridning i trinene. Trin 2 bærer  $P_1$  samt sin egenbelastning  $P_2$  over til trin 3 o.s.v.

Hvis et enkelt trins grund hedder  $a$ , og man regner, at trinets egenbelastning virker i trinets midte, får det viste trin følgende vridningsmoment:

$$M_V = P(n-1)a + P \frac{1}{2} a = Pa(n - \frac{1}{2})$$

Hele den lodrette belastning overføres til syvende og sidst til reposebjælken forneðen.

Udført på denne måde har trappen den fejl, at den synker fra foroven. Man udfører derfor ofte trinene således, at den vandrette bevægelse af det øverste trin er forhindret. Herved vil der fremkomme et horisontaltryk, der kan findes på følgende måde:

9.

Vridningsmomentet på det n'te trin er nu:

$$M_v = Pa(n - \frac{1}{2}) - Hh.$$

Den vandrette bevægelse af trinets øverste punkt er proportional med  $M_v$ :

$$\delta_{nv} = c(Pa(n - \frac{1}{2}) - Hh)$$

Ved at summere disse vandrette bevægelser fås  $\delta_v$ , der skal være nul:

$$\delta_{1v} = c(\sum_1^n Pa(n - \frac{1}{2}) - \sum_1^n Hh) = 0$$

$$Pa \sum_1^n (n - \frac{1}{2}) = Hnh.$$

$$\frac{n^2}{2} Pa = Hnh$$

$$H = \frac{na}{2h} P.$$

$M_v$  for det n'te trin er da:

$$M_v = Pa(n - \frac{1}{2}) - \frac{na}{2} P = Pa \frac{n-1}{2}$$

$M_v$  for det første trin:

$$M_1 = \frac{1}{2} Pa - Hh = - Pa \frac{a-1}{2}$$

$M_v$  for det midterste trin:  $n' = \frac{n+1}{2}$

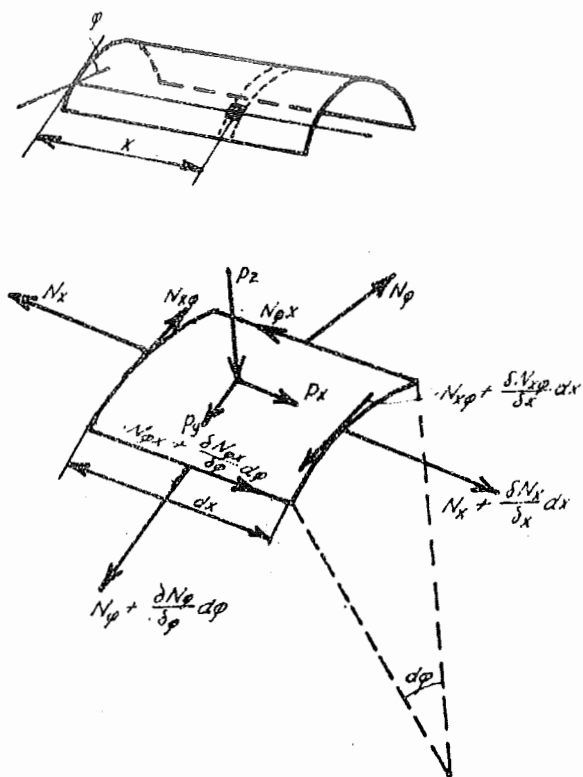
$$M_m = Pa(\frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}) - \frac{na}{2} P = 0.$$

Vridningen er således nul i det midterste trin og størst ved de yderste, men kun halvt så stor som før.

En absolut betingelse for, at begge typer af indmurede trapper kan virke rigtigt er, at trinene lægges omhyggeligt op, fast på hinanden.

### Membranteorien for cylinderskaller.

Vi betragter en cylinderskal, der er så tynd, at den ingen bøjningsmomenter kan optage. Der optræder derfor kun normalkræfter (træk eller tryk) og forskydningskræfter, der begge angives pr. længdeenhed af det snit, hvori de optræder.



Vi betragter et uendelig lille fladeelement, hvis beliggenhed angives dels ved x-koodinaten, der måles på langs ad frembringerne, og dels ved hældningsvinklen  $\varphi$  af tangenten i forhold til en lodret linie. I figuren er alle snitkræfterne angivet.

En momentligning om en normal i fladeelementets tyngdepunkt giver det kendte resultat, at  $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$ .

En projektion på x-aksen giver:

$$\frac{\delta N_x}{\delta x} dx r d\varphi + \frac{\delta N_{\varphi x}}{\delta \varphi} d\varphi dx + P_x dx r d\varphi = 0.$$

En projektion på y-aksen giver:

$$\frac{\delta N_{\varphi}}{\delta \varphi} d\varphi dx + \frac{\delta N_{x\varphi}}{\delta x} dx r d\varphi + p_y dx r d\varphi = 0 \quad (1)$$

En projektion på z-aksen giver:

$$N_{\varphi} dx d\varphi + p_z dx r d\varphi = 0.$$

Heraf fås:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -p_z r \\ \frac{\delta N_{x\varphi}}{\delta x} &= -p_y - \frac{1}{r} \frac{\delta N_{\varphi}}{\delta \varphi}; \quad \frac{\delta N_x}{\delta x} = -p_x - \frac{1}{r} \frac{\delta N_{x\varphi}}{\delta \varphi} \end{aligned} \right\} (2)$$

Disse størrelser  $N_{\varphi}$ ,  $N_{x\varphi}$  og  $N_x$  kan bestemmes i den rækkefølge, der er angivet.

$N_{\varphi}$  bestemmes direkte og ikke gennem en differentiaalligning. Man får derfor ikke nogen integrationskonstant, men en bestemt værdi i ethvert punkt; den kan derfor ikke underkastes nogen randbetingelse; hvis en sådan foreligger, for hvilken der bliver et modsætningsforhold, får man en såkaldt randfejl, som kan få en vidtrækkende betydning for skallens bæreevne og det spændingsbillede, som membranteorien giver.

Integrerer man de to andre ligninger (2), får man:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi} &= -p_z r \\ N_{x\varphi} &= - \int (p_y + \frac{1}{r} \frac{\delta N_{\varphi}}{\delta \varphi}) dx + c_1(\varphi) \\ N_x &= - \int (p_x + \frac{1}{r} \frac{\delta N_{x\varphi}}{\delta \varphi}) dx + c_2(\varphi) \end{aligned} \right\} (3)$$

Funktionerne  $c_1$  og  $c_2$ , der kun kan afhænge af  $\varphi$ , skal bestemmes af randbetingelserne; disse kan f.eks. være, at man i enderne af skallen skal have  $N_x = 0$ , hvor imidlertid forskydningskræfterne ikke behøver at være nul, hvis der findes en lodret, bæredygtig skive, i hvis planer  $N_{x\varphi}$  jo vil virke som skrå forskydningskræfter mellem skal og skive.

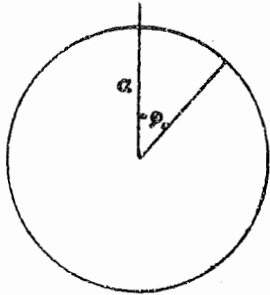
Har man en fri ende af en skal, må man der have  $N_x = N_{x\varphi} = 0$ .

Hvis den pågældende cylindreskal har en lukket kurve som normalsnit (skallen er altså et rør), kan de indre snitkræfter beregnes.

Vi vil som eksempel se på et vædskefyldt rør, hvor vædskestrykket i centrum er  $p_0$ .

Vi har da:

$$\begin{aligned} p_x &= p_y = 0 \\ p_z &= -p_0 + \gamma a \cos \varphi \\ N_{\varphi} &= +p_0 a - \gamma a^2 \cos \varphi \end{aligned}$$



$$N_{x\varphi} = - \int \frac{1}{a} (+ \gamma a^2 \sin\varphi) dx + c_1(\varphi)$$

$$= - \gamma a x \sin\varphi + c_1(\varphi)$$

$$N_x = - \int \frac{1}{a} (- \gamma a x \cos\varphi + \frac{\delta c_1(\varphi)}{\delta \varphi}) dx + c_2(\varphi)$$

$$= + \gamma \frac{x^2}{2} \cos\varphi - \frac{x}{a} \frac{dc_1(\varphi)}{d\varphi} + c_2(\varphi)$$

Ved rørets ender, d.v.s.  $x = 0$  og  $x = 1$ , skal  $N_x = 0$ ,  $c_2 = 0$

$$\frac{dc_1}{d\varphi} = \frac{1}{2} \gamma a l \cos\varphi; \quad c_1 = \frac{1}{2} \gamma a l \sin\varphi + c$$

På grund af symmetrien må for  $\varphi = 0$   $N_{x\varphi} = 0$ . Heraf følger, at  $c = 0$ . Vi har da:

$$N_\varphi = + p_0 a - \gamma a^2 \cos\varphi$$

$$N_{x\varphi} = \gamma a \left( \frac{1}{2} - x \right) \sin\varphi$$

$$N_x = - \frac{1}{2} \gamma x(1-x) \cos\varphi$$

Man ser, at  $N_x$  og  $N_{x\varphi}$  varierer ganske, som om man havde beregnet røret som bjælke mellem understøtningerne.

Man kan vise, at i ethvert lukket rør af vilkårlig form påvirket af et indre normaltryk er den bøjningsfri spændingstilstand mulig. Dette viser sig imidlertid ikke at være tilfældet for åbne cylinder-skaller.

For disse får vi 4 rande, både 2 for  $x = \text{konst.}$  og 2 for  $\varphi = \text{konst.}$  Randbetingelserne langs disse sidste rande lader sig ikke opfylde ved integrationskonstanterne.

$N_\varphi$ , ser man, kan kun blive nul for  $p_z = 0$ .

Dette må man derfor sørge for er tilfældet ved længderandene. For et tag er den væsentligste belastning den lodrette egenvægt + sne, således at randbetingelserne  $N_\varphi = 0$  af sig selv bliver opfyldt, når randen gives lodret tangent.

Betingelsen  $N_{x\varphi} = 0$  langs længderandene er det derimod betydeligt sværere at få opfyldt. Man må derfor optage forskydningskræfterne i randbjælker, som man derfor altid anbringer. At det giver store vanskeligheder at få skal og randbjælker til at virke sammen, skal vi se på senere. Man vil som oftest få randfejl, der giver bøjningsmomenter i skallen.

Vi vil imidlertid først udvikle formlerne (3) noget nærmere for almindelige cylindriske skaltage. Den almindeligste belastning har  $p_x = 0$  og  $p_y$  og  $p_z$  er uafhængige af  $x$ . For en sådan belastning kan formlerne simplificeres. Når  $N_\varphi$  og  $p_y$  er konstanter i relation til  $x$  får man:

$$N_{x\varphi} = - \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\delta N_\varphi}{\delta \varphi} \right) x + c_1(\varphi)$$

$$N_x = \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\delta N_\varphi}{\delta \varphi} \right) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{r} \frac{\delta c_1}{\delta \varphi} x + c_2(\varphi)$$

Hvis vi måler  $x$  ud fra midternormalsnittet, skal  $N_x = 0$  for  $x = \pm \frac{1}{2} l$ . Heraf fås:

$$N_x = 0 = \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\delta N_\varphi}{\delta \varphi} \right) \frac{l^2}{8} - \frac{1}{r} \frac{\delta c_1}{\delta \varphi} \frac{l}{2} + c_2(\varphi)$$

$$N_x = 0 = \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\delta N_\varphi}{\delta \varphi} \right) \frac{l^2}{8} + \frac{1}{r} \frac{\delta c_1}{\delta \varphi} \frac{l}{2} + c_2(\varphi)$$

Heraf følger igen, at:

$\frac{\delta c_1}{\delta \varphi} = 0$ ,  $c_1$  er altså også uafhængig af  $\varphi$  og er derfor en konstant  $c$ .

$$c_2 = - \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\delta N_\varphi}{\delta \varphi} \right) \frac{l^2}{8}$$

ig. hvoraf  $N_x$  kan bestemmes:

$$N_x = - \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\delta N_\varphi}{\delta \varphi} \right) \frac{l^2 - 4x^2}{8}$$

e Den samlede trækraft  $N_r$  i randbjælken er:

$$N_r = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} N_{x\varphi} dx = c_1 l.$$

Den samlede trækraft i randbjælken må imidlertid være nul, hvorfor man har:

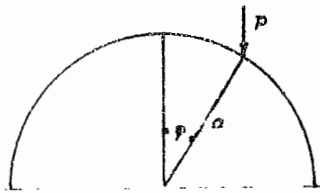
$$c_1 = 0.$$

Formlerne (3) kan nu skrives:

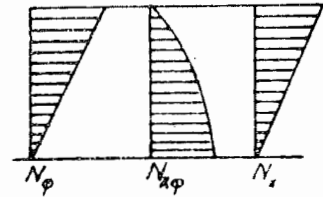
$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= - p_z r \\ N_{x\varphi} &= - \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\delta N_\varphi}{\delta \varphi} \right) x \\ N_x &= - \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta \varphi} \left( p_y + \frac{1}{r} \frac{\delta N_\varphi}{\delta \varphi} \right) \frac{l^2 - 4x^2}{8} \end{aligned} \right\} (4)$$

Eksempel 2.

En halvcirkelformet skal påvirkes af egenvægten  $p$  pr. areal-  
 enhed. Spændvidde  $l$ .



$$\begin{aligned} p_x &= 0 \\ p_y &= p \sin \varphi \\ p_z &= p \cos \varphi \end{aligned}$$



$$N_\varphi = -pa \cos \varphi$$

$$N_{x\varphi} = -\left(p \sin \varphi + \frac{1}{2} pa \sin \varphi\right)x = -2px \sin \varphi$$

$$N_x = -\frac{2p \cos \varphi}{a} \frac{l^2 - 4x^2}{8}$$

Vi ser, at der er tryk overalt i skallen; den samlede tryk-  
 kraft i et tværsnit er:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} N_x a d\varphi = -\frac{l^2 - 4x^2}{4} p \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = -\frac{p}{2}(l^2 - 4x^2)$$

Trækkræften i randbjælken fås af ligningen:

$$N_r = \int_{-\frac{1}{2}}^x N_{x\varphi} dx = -2p \int_{-\frac{1}{2}}^x x dx = p\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) = \frac{p}{4}(l^2 - 4x^2)$$

Trækkræften i de to randbjælker er således lig trykkræften. Momen-  
 tet af træk- og trykkræften er:

$$M = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} N_x a \cos \varphi a d\varphi = +\frac{\pi}{8} pa (l^2 - 4x^2)$$

"Bjælke momentet" er:

$$M = p_{bj} \frac{l^2 - 4x^2}{8} = \pi a p \frac{l^2 - 4x^2}{8}, \text{ d.v.s. det samme som}$$

skalmomentet.

Den samlede forskydning i et normalsnit er:

$$T = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} N_{x\varphi} \sin \varphi a d\varphi = -\pi pa x,$$

hvilket er lig  $-Q$ .

Man ser, at det svage punkt i membranteorien for cylinderskaller er samvirkningen mellem skal og randbjælke. Der er ved overgangen i alle tilfælde en stor pludselig spændingsændring, som er fysisk urimelig. Denne randfejl vil som før nævnt give ændringer i spændingsfordelingen. Hertil kommer, at randbjælken, som har en nedbøjning på grund af sin egenvægt, vil bøje ned og ikke, uden at der regnes særligt derpå, følges med skalranden. Der er derfor udarbejdet en bøjningsteori for skaller, som vi ikke her skal komme nærmere ind på.

Der er andre tilfælde, hvor man kan gøre udmærket brug af membranteorien, nemlig ved skaller, der i vederlagslinierne er kontinuerligt understøttet, således at man kan optage såvel  $N$  som  $N_x$ .

En anden måde, hvorpå man kan komme udenom randfejlene, er, at man sætter  $p = 0$  i den yderste del af skallen, hvorved  $N = N_{x\phi} = N_x = 0$  i den yderste del. Den belastning, som således ikke bæres af skallen, skal da bæres af randbjælken og skallen som udkraget fra randbjælken.



Vandbeholdere.

Vandbeholdere udføres almindeligvis som lodrette cylindre med vandret bund. Herved bliver cylinderkappen en ligevægtsfigur for det virkende tryk, således at belastningen kan optages <sup>alene</sup> ved en ringspænding, uden bøjningsmomenter.

I dybden  $x$  er det indvendige tryk for en vædske med vægtfylden  $\gamma$ :

$$p = \gamma x \quad (1)$$

Ringspændingen bliver da:

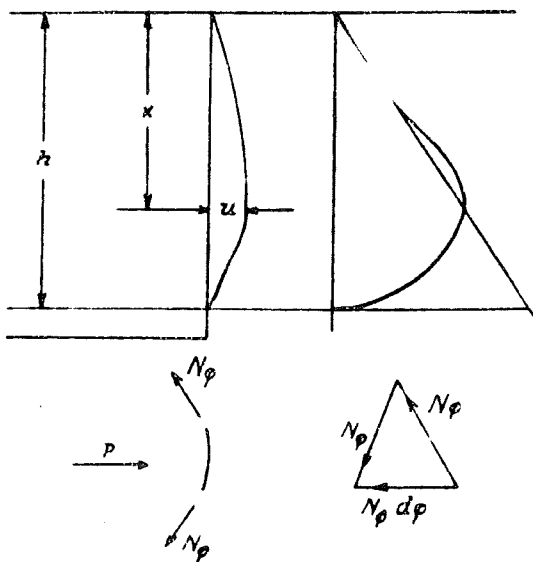
$$N_{\phi} = pr = \gamma xr \quad (2)$$

Ringspændingen optages ved hjælp af en ringarmering hvor man passende kan regne med:

$$\sigma_j = 0,8 r_j.$$

Samtidig må man sørge for tæthed i betonen. Man regner derfor trækspændingen ud i betonen og kan da regne med en betontrækspænding på ca.  $\sigma_B^t = 15 \text{ kg/m}^2$ .

I bunden, hvor bøjning er det overvejende, kan der regnes med normale tilladelige spændinger.



Ved bunden vil der i væggen komme en ret betydelig bøjning i væggen, fordi cylindervæggen ikke her kan få den udvidelse, som svarer til ringspændingen. Vi vil her beregne dette moment under forudsætning af, at væggen er helt indspændt forneden, og at vægtykkelsen er konstant.

Udbøjningen af væggen vil, hvis der ikke var sammenhæng med bunden, være proportional med afstanden  $x$  fra beholderens overkant, således

som antydnet med den skrå rette linie i figuren til højre. På grund af sammenhængen med bunden må nedbøjningerne imidlertid følge en kurve som den i samme figur viste.

Vi vil nu udskære en lodret strimmel af beholdervæggen og beregne den som en lodret bjælke.

Ringkraften  $N_\varphi$  kan udtrykkes ved:

$N_\varphi = \delta E \varepsilon$ , hvor  $\varepsilon$  er forlængelsen af ringen pr. længdeenhed. Med udbøjningen  $u$  er  $\varepsilon = \frac{u}{r}$ , og man har da:

$$N_\varphi = \delta E \frac{u}{r} . \quad (3)$$

De to kræfter  $N_\varphi$  vil give en indadgående resultant

$$P_\varphi = \frac{N_\varphi}{r} = E \delta \frac{u}{r^2} \quad (4)$$

Den samlede belastning på "bjælken" er da:

$$p = \gamma x - E \delta \frac{u}{r^2} \quad (4a)$$

Nedbøjningsliniens differentiaalligning er da:

$$E' I \frac{d^4 u}{dx^4} = \gamma x - E \delta \frac{u}{r^2} \quad (5)$$

$E'$  er den elasticitetskoefficient, som fås, når forlængelsen pr. længdeenhed på tværs af bjælkens længderetning (d.v.s. i ringretningen) er forhindret. Man får nemlig da:

$$\varepsilon_z = 0 = \frac{1}{E} (\sigma_z - \frac{1}{m} \sigma_x); \quad \sigma_z = \frac{1}{m} \sigma_x$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_z) = \frac{1}{E} \frac{m^2 - 1}{m^2} \sigma_x = \frac{\sigma_x}{E'}$$

Man har da:

$$E' = E \frac{m^2}{m^2 - 1} \quad (6)$$

I stedet for  $x$  vil vi indføre  $\xi = \frac{x}{h}$ .

Ved indsættelse heraf i ligningen og af  $I = \frac{1}{12} \delta^3$  fås:

$$\frac{d^4 u}{d\xi^4} + ku = l\xi \quad (7)$$

$$k = \frac{12(m^2 - 1)}{m^2} \frac{h^4}{\delta^2 r^2}; \quad l = \frac{12 \gamma h^5}{E' \delta^3}$$

Differentiaalligningen har løsningen:

$$n = \frac{1}{k} \xi + a \cos h n \xi \cos n \xi + b \cos h n \xi \sin n \xi + c \sin h n \xi \cos n \xi + d \sin h n \xi \sin n \xi \quad (8)$$

hvor  $n = 4 \sqrt{\frac{k}{4}}$ .

Med grænsebetingelserne  $\xi = 0$ :  $u'' = u''' = 0$   
 $\xi = 1$ :  $u = u' = 0$

fås efter nogen reduktion:

$$u \frac{k}{I} = \xi - \frac{\cos n(1-\xi) + \frac{n-1}{n} \sin n(1-\xi)}{\cosh n(1-\xi) + \sinh n(1-\xi)} \quad (9)$$

$$u'' \frac{k}{I} = 2n^2 \frac{\frac{n-1}{n} \cos n(1-\xi) - \sin n(1-\xi)}{\cosh n(1-\xi) + \sinh n(1-\xi)}$$

heraf fås:

$$M = -E'I \frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{E'I}{h^2} \frac{d^2 u}{d\xi^2}$$

$$M = -\frac{E'I}{h^2} 2n^2 \frac{\frac{n-1}{n} \cos n(1-\xi) - \sin n(1-\xi)}{\cosh n(1-\xi) + \sinh n(1-\xi)} \frac{1}{k}$$

$$= -\frac{\gamma}{6} \delta r h \sqrt{\frac{3}{m^2-1}} \frac{\frac{n-1}{n} \cos n(1-\xi) - \sin n(1-\xi)}{\cosh n(1-\xi) + \sinh n(1-\xi)} \quad (10)$$

For  $m = 4$  fås:

$$M = -0,23 \gamma r \delta^2 \sqrt{\frac{r}{\delta}} (n-1) \frac{\cos n(1-\xi) - \frac{n}{n-1} \sin n(1-\xi)}{\cosh n(1-\xi) + \sinh n(1-\xi)} \quad (11)$$

For  $\xi = 1$ , d.v.s. i indspændingen forneden, er:

$$M_1 = -0,23 \gamma r \delta^2 \sqrt{\frac{r}{\delta}} (n-1) \quad (12)$$

Det største positive moment findes for:

$$n(1-\xi) = \frac{\pi}{2}; \quad \xi = 1 - \frac{\pi}{2n} \quad (13)$$

$$M_{\max} = -0,205 \frac{n}{n-1} M_1$$

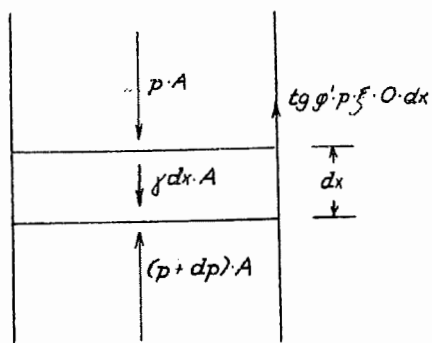
De udviklede formler gælder som nævnt kun for  $\delta$  konstant; hvis  $\delta$  aftager opad, ændrer  $M_1$  sig kun lidt, når man for  $\delta$  indsætter  $\delta_n$ , d.v.s. tykkelsen forneden, hvorimod  $M_{\max}$  kan blive noget større, indtil 80% større end for  $\delta$  konstant.

Hvis man i det tilfælde vil gennemføre beregningen kan man udvikle differentiallygningen (7) som en differentiallygning se P.M. Frandsen: Kupler og Vandbeholdere. Tekn. Tidsskrift, afd. for

jernbeton, 1915, s. 34 og 1916, s. 1, og A. Ostenfeld: Teknisk Elasticitetslære 1924, § 65, 2.

### Silotryk.

På grund af friktionen langs siloens lodrette sider vil det lodrette tryk i en vis dybde være noget mindre end vægten af den overliggende masse. For at finde trykket vil vi se på et uendelig tyndt lag af tykkelsen  $dx$ .



På dette lag virker følgende kræfter:

Trykket fra den overliggende masse  $p \cdot A$ , hvor  $A$  er siloarealet.

Vægten:  $\gamma A dx$

Trykket opad fra neden:  $(p+dp)A$ .

Friktionen langs siderne.

Det lodrette tryk  $p$  vil fremkalde et tryk mod siderne  $p \xi$ , hvor  $\xi$  er jordtryksfaktoren. F.eks. for aktivt "jord"tryk  $\xi = \operatorname{tg}^2 (45 - \frac{\phi}{2})$ .

Når friktionsvinklen mellem væg og masse kaldes  $\phi'$ , og når siloens omkreds er  $O$ , fås:  $\operatorname{tg} \phi' \cdot p \xi O dx$ . Ligevægtsligningen giver da:

$$pA + \gamma dx A - (p+dp)A - pO \operatorname{tg} \phi' \xi dx = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dp}{dx} = \gamma - p \frac{O}{A} \operatorname{tg} \phi' \xi \quad (2)$$

$$\frac{dp}{dx} = \gamma - pm, \text{ hvor } m = \frac{O}{A} \operatorname{tg} \phi' \xi \quad (3)$$

Denne differentiaalligning løses således:

$$- \frac{d(\gamma - pm)}{dx} \frac{1}{m} = \gamma - pm; \quad \gamma - pm = y$$

$$- \frac{dy}{dx} \frac{1}{m} = y; \quad - \frac{dy}{y} = m dx$$

$$- \int \frac{1}{y} dy = \int m dx$$

$$\frac{1}{\gamma - pm} = ce^{mx}$$

$$p = \frac{\gamma}{m} - \frac{1}{cm} \frac{1}{e^{mx}}$$

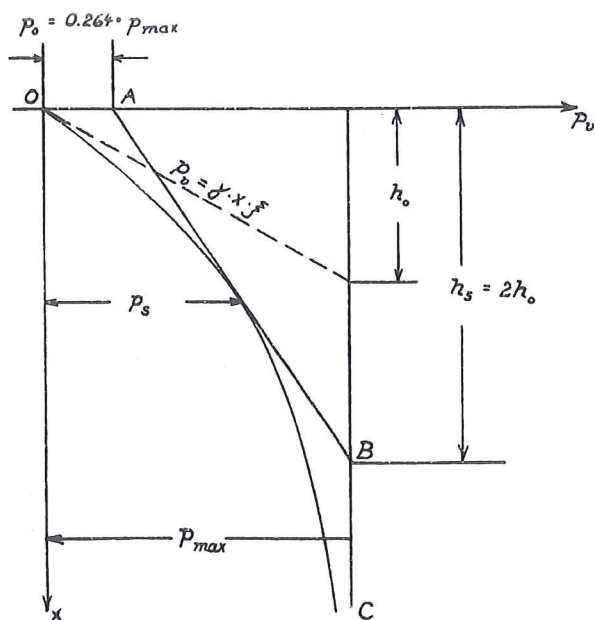
For  $x = 0$  er  $p = 0$ ; heraf bestemmes  $c$ , og man har:

$$p = \frac{\gamma}{m} \left(1 - \frac{1}{e^{mx}}\right) = \frac{A}{0 \text{ tg } \varphi' \xi} \left(1 - \frac{1}{e^{mx}}\right)$$

Sidetrykket mod sidevæggen er da:

$$p_v = p\xi = p_{\max} \left(1 - \frac{1}{e^{mx}}\right),$$

hvor: 
$$p_{\max} = \frac{\gamma A}{0 \text{ tg } \varphi'}$$



$p_v$  afbildes i den i figuren viste kurve, der først når værdien  $p_{\max}$  uendelig fjernt, men ret hurtigt nærmer sig denne linie som asymptote. Kurven tangerer i sit øverste punkt den rette linie, som angiver det almindelige jordtryk:

$$p_v = \gamma x \xi.$$

Kurven erstattes ofte af den viste brudte linie OABC, hvor AB er kurvens tangent i dybden  $h_0$ , hvor  $p_v = \gamma x \xi = p_{\max}$ . Heraf fås:

$$h_0 = \frac{p_{\max}}{\gamma \xi} = \frac{1}{m}$$

I denne dybde har kurven trykværdien:

$$p_s = p_{\max} \left(1 - \frac{1}{e^{m \frac{1}{m}}}\right) = p_{\max} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\frac{dp}{dx} = p_{\max}^m e^{-mh_0} = \frac{p_{\max}^m}{e} = \frac{p_{\max} p_s}{h_s - h_0} = \frac{p_{\max} \cdot \frac{1}{e}}{h_s - h_0}$$

Heraf følger  $h_s = 2h_0$ .

$$p_0 = p_{\max} - 2(p_{\max} - p_s) = p_{\max} \left(1 - \frac{2}{e}\right) = 0,264 p_{\max}.$$

Spørgsmålet er nu, hvordan  $\xi$  skal bestemmes. Hvis den indre friktion i et materiale er karakteriseret ved friktionsvinklen  $\varphi'$ ,

ved vi blot, at største vinkel mellem et snits normal og spændingsretning skal være lig eller mindre end  $\varphi$ . For vinklen lig  $\pm\varphi$  fås de to yderværdier:

$$\begin{aligned} \text{Aktivt jordtryk: } \xi_a &= \text{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi}{2} \right). \quad \text{Min-værdi} \\ \text{Passivt " : } \xi_p &= \text{tg}^2 \left( 45 + \frac{\varphi}{2} \right). \quad \text{Max-værdi.} \end{aligned}$$

Den virkelige værdi må ligge mellem disse to, men ud fra statiske synspunkter kan der ikke angives nogen nærmere værdi. I almindelighed regnes med min-værdien  $\xi_a$ , men dette er ialfald på den usikre side. Man er i de senere år begyndt at regne med det såkaldte hviletryk,  $\xi_v$ , som derfor nærmere skal omtales.<sup>x)</sup>

For aktivt jordtryk vil der ifølge sagens natur ske en udvidelse af massen i vandret retning. For passivt vil der ske en sammentrykning i vandret retning.

Da imidlertid silovæggene altid vil være lidt eftergivelige i forhold til massen, må vi regne med, at der kommer et sådant sidetryk, at sideudvidelsen bliver nul. Det er dette tryk, der kaldes hviletrykket.

Hvis for hviletrykket største vinkel mellem et snits normal og spændingsretning er  $\varphi_v$  ( $\varphi_v$  må altid være mindre end  $\varphi$ ), har man:

$$\xi_v = \text{tg}^2 \left( 45 - \frac{\varphi_v}{2} \right).$$

For at give et indtryk af hviletrykkets størrelse skal her angives nogle værdier, som Wästlund har bestemt ved forsøg:

$$\begin{aligned} \text{Cementklinker: } \varphi &= 42^\circ; \quad \varphi_v \sim 25^\circ; \quad \varphi' = 31^\circ \\ \text{Cement: } \varphi &= 40^\circ; \quad \varphi_v \sim 25^\circ \text{ à } 28^\circ; \quad \varphi' = 20^\circ. \end{aligned}$$

Endnu et forhold skal påpeges ved siloer, der fyldes med stof, der er varmere end omgivelserne, f.eks. cementklinker. Det fremkalder varmespændinger i silovæggene. Også om dette der ses nærmere i den omtalte artikel af Wästlund.

x) Se således: Georg Wästlund: Om Silotryck, Te' häfte 38, V- och V 9, Stockholm.